Gli argomenti di Zenone contro la possibilità del movimento e la loro rivalutazione ad opera di matematici e fisici

Sandro Nannini* - Sibylle Mahrdt-Hehmann*

English title: Zeno's Arguments against the Possibility of Movement and their Reassessment by Mathematicians and Physicians.

Abstract: The order in which Aristotle presents in *Physics* the four famous Zeno's paradoxes on the impossibility of movement is implicitly based on the intersection between two different conceptual pairs: 1) direct demonstration or *reductio ad absurdum*; 2) infinite divisibility or discrete space and discrete time. "The Dichotomy" is a direct demonstration that presupposes (at least) the infinite divisibility of space. "Achilles (and the Tortoise)" starts from the same assumption, but it is a *reductio ad absurdum*. "The Arrow" goes back to being a direct demonstration but presupposes discrete space and discrete time unlike "The Dichotomy". "The Stadium" starts from the same assumption as "The Arrow" but it is a *reductio ad absurdum* as "Achilles (and the Tortoise)". This quadripartite scheme of Zeno's paradoxes helps to understand that considering Zeno a precursor of quantum mechanics does not find any solid foundation in the Aristotelian text and highlights that the solution given by Aristotle's to Zeno's paradoxes, although less rigorous than the solution given to them by B. Russell and other mathematicians, is not entirely different from their solution, for Aristotle, too, realized that the result of a sum having an infinite number of addends can be a finite number (today we would say a real number).

Keywords: Zeno; Aristotle; paradox; infinity; real number.

1. *La riscoperta di Zenone*

Aristotele nella *Fisica* critica quattro argomenti (*lógoi*) proposti da Zenone di Elea sulla base di altrettanti paradossi contro la possibilità del movimento (Aristotele, 1995: 337-9 – *Phys.* VI 9 239b 5 – 240a 18). Sia gli argomenti di Zenone, giunti sino a noi purtroppo solo tramite la ricostruzione datane da Aristotele, sia le critiche ad essi rivol-

* Università di Siena. E-mail: sandro.nannini@unisi.it
** E-mail: sibylle_mahrdt_hehmann@hotmail.com

 DOI: 10.4454/blityri.v10i1.286

te da quest'ultimo si sono guadagnati per secoli e secoli l'attenzione di filosofi, scienziati e scrittori dall'antichità fino ai giorni nostri. Ma, nonostante questo grande interesse nei loro confronti, essi sono stati considerati in genere, sulla scia di Aristotele, come degli acuti e sofisticati sofismi. Le cose sono cambiate dopo la metà dell'Ottocento, quando alcuni matematici, avvalendosi del calcolo infinitesimale, hanno cercato di dare ad essi una soluzione più adeguata di quella aristotelica. In questo contesto B. Russell agli inizi del Novecento è giunto a sostenere che i paradossi di Zenone, lungi dall'essere dei meri sofismi, sono addirittura «a fondamento di una rinascita della matematica» (Russell, 2010/1901: 353; cfr. anche Russell, 1980/1917: 77).

Dopo questa rivalutazione ad opera di Russell i quattro paradossi di Zenone sull'impossibilità del movimento (insieme ad un altro paradosso analogo sull'unità dell'Essere e l'impossibilità del Molteplice che qui non discuteremo)[1] sono stati oggetto di studi approfonditi da un punto di vista sia storico sia teorico[2], finché essi a partire dagli anni Settanta del XX secolo hanno attratto l'attenzione anche di alcuni fisici che hanno visto in Zenone un precursore, entro certi limiti ovviamente, addirittura della meccanica quantistica (Itano *et al.*, 1990; Rovelli, 2014: 20-24).

Ma questa immagine di Zenone è veritiera? Non lo sapremo mai con certezza, dato che purtroppo del suo pensiero e della sua stessa vita sappiamo pochissimo (Viano, 1993), anche se è molto probabile che egli, cercando di dimostrare l'impossibilità del movimento, volesse difendere la concezione che dell'Essere – uno, indifferenziato e immobile – aveva Parmenide, suo maestro. Ad ogni modo l'unico Zenone del quale conviene discutere, soprattutto se si ha un interesse più teorico che storiografico nei confronti dei suoi paradossi, è lo Zenone che conosciamo attraverso Aristotele, lo Zenone che pretende di provare l'impossibilità del movimento attraverso quattro argomenti, basati su altrettanti paradossi, divenuti universalmente noti con i nomi ad essi attribuiti da Aristotele stesso: la Dicotomia, Achille [e la tartaruga][3], la Freccia e lo Stadio.

1 Su questo paradosso cfr. l'approfondita analisi di Fano (2012: 57-88).

2 Per una ricostruzione attenta, informata e accompagnata da un'ampia bibliografia di tutto questo dibattito, da un punto di vista sia storico sia teorico, cfr. di nuovo Fano (2012).

3 Aristotele, nel testo giunto fino a noi, nomina solo Achille. L'identificazione dell'animale lento che egli insegue con una tartaruga è un'aggiunta successiva dei suoi commentatori (Ross, 1979/1936: 71).

2. *La Dicotomia*

«Il primo [argomento] è quello sull'impossibilità del movimento, in quanto ciò che si muove deve raggiungere la metà prima del termine» (Aristotele, 1995: 337 – *Phys*. VI 9 239b 11-13). In altre parole, dato il carattere continuo e la conseguente divisibilità all'infinito di qualsiasi distanza spaziale finita (per quanto corta essa sia), partendo dal punto *A* si può raggiungere il punto *B* solo se prima si è raggiunto il punto *C* intermedio tra *A* e *B*. Per la stessa ragione prima di raggiungere *C* si dovrà raggiungere *D*, punto intermedio tra *A* e *C*; e così via all'infinito:

|*A* |*D* |*C* |*B*

Figura 1

La suddivisione del segmento *AB* potrebbe essere progressiva invece che regressiva, ossia si potrebbe dire che dopo aver raggiunto *C*, si dovrà raggiungere *D*, punto intermedio tra *C* e *B* così via all'infinito:

|*A* |*C* |*D* |*B*

Figura 2

Molti studiosi considerano logicamente irrilevante optare per l'una o l'altra ipotesi (ad es. Fano, 2012: 121-3). Noi optiamo invece per la prima ipotesi, quella della suddivisione mediante avvicinamento regressivo ad *A* (cfr. la *Figura 1*). La ragione di questa nostra preferenza è molto semplice. Nella seconda ipotesi (cfr. la *Figura 2*) partendo da *A* non si può mai raggiungere *B*, ma comunque si può raggiungere prima *C*, poi *D* ecc. Pertanto nella seconda ipotesi il movimento è possibile. Nella prima ipotesi invece non si riesce affatto a muoversi, perché non si riesce neppure a fare il primo passo. Per questo, se l'intenzione di Zenone era quella di provare l'impossibilità del movimento, l'ipotesi della suddivisione regressiva si presenta come nettamente preferibile.

Comunque sia, Aristotele obietta a Zenone che non è vero che «non è possibile percorrere l'infinito […] in un tempo finito» (Aristotele, 1995: 299 – *Phys*. VI 2 233a 21-3). Questa obiezione diviene più chiara se si tiene presente che per Aristotele l'unico tipo di infinito concepibile, non importa se «secondo gli estremi» o «secondo la divisione» (*ibid*. – *Phys*. VI 2 233a 25-6)[4], è l'infinito in potenza, non l'infinito in atto (ivi: 141 – *Phys*. III 5 206a 16-8). Di conseguenza il fatto che nella Dicotomia il segmento *AB*, essendo una grandezza continua, sia regressivamente divisibile all'infinito significa soltanto che esso è in potenza divisibile in un numero infinito di parti sempre più corte; ma ciò non impedisce che esso sia in atto nel suo complesso un segmento finito e che, in modo perfettamente corrispondente, anche il tempo necessario per percorrerlo sia in atto un intervallo finito, che però in potenza è divisibile in un numero infinito di sotto-intervalli sempre più brevi: «nel continuo vi sono infinite metà, ma non in atto, bensì in potenza» (ivi: 457 – *Phys*. VIII 8 263a 28-29).

3. *Achille [e la tartaruga]*

Mediante l'Achille Zenone sostiene, secondo Aristotele, che «il più lento non sarà mai raggiunto nella corsa dal più veloce; questo perché è necessario che l'inseguitore prima raggiunga il punto dal quale colui che è inseguito è partito; sicché il più lento necessariamente avrà un qualche vantaggio sull'inseguitore» (ivi: 337 – *Phys*. VI 9 239b 15-18). Aristotele ritiene che l'Achille sia del tutto simile alla Dicotomia: in quest'ultimo paradosso, se si vuole andare da *A* a *B*, a causa della divisibilità all'infinito dello spazio non si riesce a fare neppure il primo passo. Nell'Achille, sempre a causa della divisibilità all'infinito dello spazio, Achille piè veloce non riesce a raggiungere la lentissima tartaruga. La distanza tra Achille e la tartaruga non diviene mai pari a zero. Il che è ben strano! Pertanto chi ammette la possibilità del movimento cade in contraddizione: da un lato trova ovvio che Achille raggiungerà prima o poi il suo antagonista, ma dall'altro, a meno che non voglia negare la divisibilità all'infinito dello spazio, deve ammettere il contrario. L'unico modo

[4] Ad esempio il segmento *AB* può o essere diviso all'infinito, al suo interno, in segmenti sempre più corti (infinito secondo la divisione) oppure può essere indefinitamente prolungato, lungo la retta su cui giace, sia a sinistra di *A* sia a destra di *B* (infinito secondo gli estremi).

per uscire da questo dilemma – pensa Zenone – è negare che Achille possa muoversi; ossia, più in generale, occorre negare di nuovo la possibilità del movimento.

Detto questo, Aristotele sostiene che l'Achille, essendo sostanzialmente identico alla Dicotomia, è criticabile per le medesime ragioni: «è falso ritenere che colui che sta avanti non possa essere raggiunto; infatti, finché esso sta avanti non è raggiunto; ma alla fine sarà raggiunto [*all'homo̱s katalambánetai*)], purché si sia d'accordo che quella da percorrere è una linea finita» (ivi: 337, trad. it. modificata – *Phys*. VI 9 239b 26-29).

L'obiezione di Aristotele è qui formulata in modo meno chiaro che nel caso della Dicotomia, ma in fondo si tratta della medesima obiezione. Achille per raggiungere il suo antagonista deve percorre una distanza finita che è suddivisibile, in potenza, in un numero infinito di sotto-distanze. Ma ciò non crea, secondo Aristotele, alcun problema, perché la distanza in atto che effettivamente viene percorsa da Achille è finita e quindi è percorribile in un tempo altrettanto finito. Secondo Aristotele, all'opposto di quello che pensava Zenone, è un fatto indubitabile che Achille raggiungerà sempre il suo antagonista: «[…] ma alla fine sarà raggiunto». È solo quando questo fatto viene analizzato *ex post* che questa distanza finita risulta essere divisibile, in potenza, in un numero infinito di sotto-distanze di misura progressivamente minore. Lo stesso dicasi per i relativi intervalli temporali. Per Zenone quel "fatto" appartiene all'ingannevole mondo dell'apparenza, come era stato già dimostrato a suo avviso dalla Dicotomia. Per Aristotele invece, che ritiene di aver provato quanto fallace sia la Dicotomia, è fuori discussione che il corridore più veloce prima o poi raggiungerà quello meno veloce. Ciò che resta da chiarire è solo quale errore di ragionamento (quale "paralogismo") abbia indotto Zenone a dubitarne!

4. *La Freccia*

L'argomento della Freccia viene presentato e criticato da Aristotele subito all'inizio del capitolo che egli dedica in generale ai paradossi zenoniani contro la possibilità del movimento. Probabilmente Aristotele lo pone in questa posizione di rilievo perché lo considera l'argomento che più colpisce per la sua stranezza:

> Zenone ragiona in modo fallace. Egli dice che, se qualcosa è in riposo [...][5] quando sia [per un certo tempo] sempre nel medesimo [luogo] [*ótan <u>êi katà tò íson</u>*] e [se anche] ciò che è in moto si trova sempre in ogni istante [nel medesimo luogo] [*éstin d'aieì tò ferómenon en t<u>ôi</u> nûn*], [allora] la freccia in movimento è immobile. Ma questo è falso; il tempo infatti non è composto di istanti indivisibili, così come nessun'altra grandezza lo è (Aristotele, 1995: 337, trad. modificata – *Phys*. VI 9 239b 5-9).[6]

Successivamente Aristotele riprende l'argomento della Freccia, ponendolo questa volta in terza posizione dopo la Dicotomia e l'Achille, e lo liquida ripetendo la critica precedente: «Il terzo [argomento], citato prima, afferma che la freccia scagliata è immobile; ma questo risultato è conseguenza della tesi che il tempo è composto da istanti; se non si concede questa premessa, l'argomentazione non starà in piedi» (ivi: 337-9 – *Phys*. VI 9 239b 30-33).

Questo ragionamento – obietta Aristotele – sarebbe corretto solo se lo spazio e il tempo fossero delle grandezze discrete. I punti sarebbero allora parti della distanza percorsa (ossia atomi di spazio) e gli istanti parti (ossia atomi) del tempo necessario per percorrerla. Solo in quel caso la freccia, trovandosi in un certo "istante" in un punto preciso della sua traiettoria, sarebbe ferma in quel "punto" per tutta la durata di quell'"istante". Ma spazio e tempo, essendo delle grandezze continue, sono divisibili all'infinito e quindi non possono essere costituite da componenti che siano tanto indivisibili quanto dotate di un'estensione o di una durata (ossia siano atomi di spazio o di tempo); e pertanto non possono essere composte rispettivamente da punti o istanti, entità che sono sì indivisibili, ma proprio perciò non sono estese o dotate di una durata. In altre parole né i segmenti sono fatti di punti né gli intervalli di tempo sono fatti di istanti. I punti sono i limiti dei segmenti, non le loro parti. Lo stesso dicasi degli istanti rispetto agli intervalli di tempo (ivi: 289-291 – *Phys*. VI 1 231a 21 – 231b 18). Pertanto la freccia in volo può esser ferma solo in un tratto del suo percorso (un tratto delimitato

[5] Seguendo l'esempio di Ross (1979/1936: 658), espungiamo dal testo le parole tra parentesi quadre "[o in moto]".

[6] Questo passo, giuntoci probabilmente corrotto e con aggiunte improprie, è di difficile comprensione. Per tale ragione, dopo aver consultato varie traduzioni, ci siamo presi la libertà di modificare la traduzione di L. Ruggiu, senza alcuna pretesa di rigore filologico (non siamo dei grecisti!); lo abbiamo fatto solo per esprimere con la maggior chiarezza possibile che cosa noi abbiamo capito di questo passo molto controverso.

da due punti e quindi avente una lunghezza) e non in un singolo punto, che di quel percorso non può essere una parte. Lo stesso dicasi per l'intervallo di tempo durante il quale una freccia sia davvero ferma: anch'esso deve avere una durata e non può essere ridotto ad un singolo istante.

Questa critica, a dire il vero, probabilmente non coglie pienamente le intenzioni di Zenone. È presumibile infatti che questi (in testi purtroppo andati perduti), dopo aver a suo avviso provato tramite la Dicotomia e l'Achille che il movimento non è possibile nell'ipotesi che lo spazio sia una grandezza continua divisibile all'infinito, volesse dimostrare che il movimento sarebbe impossibile anche nell'ipotesi opposta che lo spazio abbia invece una struttura discreta, per giungere così alla conclusione che il movimento è impossibile in ogni caso. Ma non avrebbe mai sostenuto che lo spazio e il tempo abbiano effettivamente una struttura discreta!

5. *Lo Stadio*

Anche questo argomento – talvolta inspiegabilmente trascurato anche in studi molto seri e approfonditi sui paradossi di Zenone (cfr. ad es. Fano, 2012) – parte al pari della Freccia, almeno per come ce lo presenta Aristotele, dal presupposto che lo spazio abbia una struttura discreta. Con lo Stadio infatti, secondo Aristotele, Zenone intendeva provare che, se il movimento fosse possibile in uno spazio discreto, allora si giungerebbe all'assurda conseguenza che un corpo può impiegare due tempi diversi (anch'essi discreti) per compiere lo stesso movimento. Tuttavia questo quarto argomento a differenza dei primi, giuntoci probabilmente corrotto e con aggiunte improprie da parte di commentatori successivi, non è affatto chiaro nel testo aristotelico di cui disponiamo:

> Il quarto argomento concerne masse uguali [è *perì tô̱n […] ógkô̱n*] che si muovono nello stadio in senso contrario a masse uguali, le une a partire dalla fine [*apò télous*] dello stadio, le altre a partire dalla metà [*apò mésou*], entrambe con uguale velocità [rispetto ad altre masse uguali che sono invece ferme. Zenone] ritiene, con questo argomento, che accada che la metà del tempo sia uguale al doppio. Il paralogismo consiste in questo: nel ritenere che masse uguali, con velocità uguale, si muovano per un tempo uguale sia lungo ciò che è in moto sia lungo ciò che è fermo. Ma questo è falso. Ad esempio: siano gli *AA* delle

masse uguali che stanno ferme, mentre i *BB* siano delle masse, uguali alle prime per numero e per grandezza, che partono dalla metà; i *CC*, anch'essi uguali per numero e per grandezza a questi [ossia uguali agli *AA* e ai *BB*] si muovano con velocità uguale a quella dei *BB*, ma partendo dall'estremità (*apò toû eschátou*). Accade pertanto che il primo *B* e il primo *C* raggiungano simultaneamente le [rispettive] estremità, muovendosi l'uno parallelamente all'altro [ma in direzioni opposte]. Sicché avviene che [il primo] *C* sia passato accanto a tutti i *B*, mentre [il primo] *B* è passato accanto alla metà degli *A*: dunque anche il tempo è metà, perché v'è uguaglianza di ognuno di essi in rapporto a ciascuna [massa] (*íson gàr ekáterón estin par'éskaton*). Ma simultaneamente accade che *B* avrà compiuto il percorso lungo tutti i *C*: infatti il primo *C* e il primo *B* saranno simultaneamente agli estremi opposti per il fatto che entrambi si muovono in tempo eguale lungo gli *A* [...])[7]. Questo è dunque l'argomento, ma esso incorre nell'errore che abbiamo già rilevato (*Phys.* VI 9 239b 33 – 240a 18, trad. it. modificata, 1995: 339).

Ricostruire il senso preciso di questo passo non è facile, perché esso contiene indicazioni apparentemente contraddittorie. Aristotele infatti, secondo l'interpretazione più diffusamente accettata, sembra prima dire che i *B* partono dal mezzo dello stadio e i *C* dalla sua fine (diciamo, nel nostro schema, dall'estremo di sinistra), per poi affermare che il primo *B* raggiunge tale estremo mediante un certo numero di mosse affiancandosi solo alla metà degli *A* (le masse ferme), mentre il primo *C* (appartenente alle masse che si muovono da sinistra verso destra) raggiunge mediante lo stesso numero di mosse l'estremo opposto, quello di destra, incrociando l'intera colonna dei *B*, che si muove invece in direzione opposta da destra verso sinistra (nessuna massa di tipo *C* è ancora entrata nello stadio, mentre tra quelle di tipo *B* solo le masse *B3* e *B4* ne sono ancora fuori):

Situazione iniziale (ricostruzione abituale)

				Estremo sinistro					Estremo destro
--------	--------	--------	--------	A1	A2	A3	A4	--------	--------
--------	--------	--------	--------			←B1	B2	B3	B4
C4	C3	C2	C1→					--------	--------

Figura 3

[7] Seguendo l'esempio Ross, espungiamo dal testo, a differenza di Ruggiu, la frase «un tempo uguale sarà impiegato per ciascuno dei *B* e per ciascuno degli *A*, come dice [Zenone]»

Ma Aristotele afferma anche – e qui il passo sopra citato non è affatto ambiguo – che la situazione finale è questa (tutte le masse sono dentro lo stadio):

Situazione finale

Estremo sinistro Estremo destro

--------	--------	--------	--------	A1	A2	A3	A4	--------	--------
--------	--------	--------	--------	B1	B2	B3	B4	--------	--------
--------	--------	--------	--------	C4	C3	C2	C1	--------	--------

Figura 4

Ma com'è possibile, se la situazione iniziale è quella indicata nella *Figura 3* che – mentre la massa *B1* (capofila dei *B*) si affianca, in successione, a *A2* e *A1* – la massa *C1* (capofila dei *C*), pur procedendo alla medesima velocità di *B1* (ma in direzione opposta), riesca con il medesimo numero di mosse ad affiancarsi in successione ad *A1*, *A2*, *A3* e *A4* (cfr. *Figura 4*)? Molti commentatori antichi e interpreti moderni si sono arrampicati sugli specchi per dare un senso coerente a questo passo aristotelico. Ma, se la situazione di partenza fosse quella indicata dalla *Figura 3*, in alcun modo *C1* potrebbe raggiungere l'estremo *A4* con quel medesimo numero di mosse che è sufficiente a *B1* per raggiungere l'estremo *A1* (come invece prevede la situazione finale descritta nella *Figura 4*).

Tutto si chiarisce invece se, seguendo le indicazioni di Ross (1979/1936: 660-666), si dà all'espressione "dalla metà" un diverso significato. Secondo Ross Aristotele intende riferirsi con quella espressione non al punto di mezzo dello stadio, ma a quello che è il *turning point* (nel nostro schema l'estremo di destra) per un corridore che, partito dall'estremo di sinistra dello stadio, una volta raggiunto, a metà della sua corsa, il capo opposto (coincidente nel nostro schema con l'estremo di destra) torni indietro verso il suo punto di partenza; punto di partenza che nelle corse effettuate negli stadi dell'antichità fungeva abitualmente anche da *télos* ("fine") della corsa, ossia da traguardo. Inoltre, sempre secondo Ross, Aristotele, dicendo che i *C* partono dalla "fine" dello stadio, mentre i *B* partono dalla "metà" (ossia dal *turning point*), intende riferirsi non al loro punto di partenza, bensì alla loro direzione di marcia: i

B si muovono a scatti (ossia mediante delle mosse, quasi fossero dei pedoni che si muovono su una scacchiera) dal *turning point* verso il traguardo (nel nostro schema da destra verso sinistra), mentre i *C* si muovono, sempre a scatti, all'inverso dal traguardo verso il *turning point* (le masse *C3-C4* sul lato sinistro e *B3-B4* sul lato destro non sono ancora entrate nello stadio):

Situazione iniziale (ricostruzione di Ross)

				Estremo sinistro				Estremo destro	
--------	--------	--------	--------	A1	A2	A3	A4	--------	--------
--------	--------	--------	--------			←B1	B2	B3	B4
--------	--------	C4	C3	C2	C1→			--------	--------

Figura 5

Questa seconda ricostruzione della situazione iniziale (cfr. *Figura 5*), a differenza di quella abituale, rende perfettamente chiaro che cosa Aristotele intende dire: mentre la fila dei *B* effettua due mosse verso sinistra, la fila dei *C* effettua due mosse verso destra; di conseguenza *B1* raggiunge con due mosse *A1* (ossia l'estremo di sinistra dello stadio, il "traguardo"), mentre *C1* raggiunge simultaneamente sempre con due mosse *A4*, ossia raggiunge l'estremo di destra, la "metà" intesa come *turning point* (la metà della corsa dunque, non dello stadio!). Questo è pienamente coerente con la situazione finale descritta da Aristotele (cfr. *Figura 4*) e con tutto ciò che egli dice sui movimenti dei *B* e dei *C* sia gli uni rispetto agli altri sia di entrambi rispetto agli *A*.

Da tutto ciò Aristotele ricava la conclusione che Zenone intendesse mostrare mediante questo esempio che, se il movimento in generale fosse possibile e, di conseguenza, delle masse potessero muoversi le une rispetto alle altre nel modo descritto, si verificherebbe che un medesimo movimento dei *B* (o dei *C*) avrebbe due durate differenti. Infatti, se prendiamo come misura della durata di un movimento il numero delle masse affiancate o incrociate (di qualunque tipo esse siano), allora, dato che *B1*, mentre si affianca in sequenza a *A2* e *A1*, incrocia sempre in sequenza *C1*, *C2*, *C3* e *C4*, questo suo movimento dura due tempi diversi che sono l'uno la metà dell'altro.

Ma il ragionamento di Zenone – obietta Aristotele – è fallace: egli non tiene conto del fatto che la velocità con cui i *B* incrociano i *C* è doppia rispetto alla velocità con cui essi affiancano gli *A*, dato che questi ultimi stanno fermi, mentre i *C* vengono loro incontro. In conclusione, secondo Aristotele, l'intero argomento dello Stadio è fallace perché Zenone non tiene conto della differenza tra velocità assoluta e velocità relativa.

Questa critica è *fair* o trasforma l'argomento di Zenone in una testa di turco che può essere abbattuta con eccessiva facilità? Che cosa Zenone abbia sostenuto davvero riguardo allo Stadio, come al solito, non possiamo saperlo con certezza. Ma, anche se ci limitiamo alla ricostruzione che ci offre Aristotele di questo paradosso, risulta chiaro che l'assurdità del ragionamento che porta Zenone a concludere che il medesimo movimento verrebbe eseguito in due tempi che sono l'uno il doppio dell'altro è, a suo avviso, una conseguenza del fatto che in un movimento a scatti lungo delle masse indivisibili il tempo necessario per compiere un certo movimento è equivalente al numero delle masse affiancate o incrociate (= lo spazio percorso) diviso per il numero degli scatti effettuati (= la velocità con cui quel movimento è stato eseguito). Insomma, dato che "tempo = spazio/velocità", allora "tempo (con struttura discreta) = masse/mosse". In coerenza con questa assunzione ogni massa di tipo *B*, mentre affianca con una mossa (ossia con un movimento a scatto, un movimento indivisibile) una massa di tipo *A*, incrocia con quella medesima mossa due masse di tipo *C*. Di conseguenza un *B*, se incrocia due masse di tipo *C* quando si affianca a una massa di tipo *A*, allora secondo la medesima proporzione, quando incrocia una massa di tipo *C*, si affiancherà a "mezza massa" di tipo *A*! Ma questo per ipotesi non è possibile, dato che nello Stadio, secondo la presentazione che ne dà Aristotele stesso, tutta la dimostrazione per assurdo dell'impossibilità del movimento si basa sul presupposto che le masse (gli *ógkoi*) siano dei blocchi indivisibili e che le mosse mediante le quali esse possono essere affiancate o incrociate siano dei movimenti a scatto altrettanto indivisibili. È proprio l'impossibilità delle "mezze masse" e delle "mezze mosse" a rendere impossibile il movimento nell'ipotesi che tempo e spazio abbiano una struttura discreta. Questo era probabilmente lo scopo di Zenone nel presentare il paradosso dello Stadio; ossia Zenone voleva rendere evidente che l'ipotesi che il movimento sia possibile porta ad assurdità non solo nel caso che lo spazio e il tempo siano delle grandezze continue (vedi l'Achille), ma anche nel caso opposto che lo spazio e il tempo (e conseguentemente anche il movimento) siano delle grandezze discrete.

6. *Uno schema quadripartito dei quattro paradossi*

La maggior parte degli interpreti ritiene che l'ordine nel quale Aristotele presenta i paradossi di Zenone sul movimento non abbia alcuna importanza e che gli argomenti che su di essi si fondano siano tutti e quattro delle semplici varianti di una dimostrazione per assurdo dell'impossibilità del movimento. La ricostruzione che noi abbiamo fatta di questi paradossi e dei relativi argomenti, per come Aristotele ce li fa conoscere, suggerisce però un approccio diverso.

In primo luogo, così come i primi due paradossi (la Dicotomia e l'Achille) si basano, com'è riconosciuto da tutti gli interpreti, sul presupposto della divisibilità all'infinito dello spazio, la Freccia al contrario si fonda sul presupposto opposto che lo spazio e il tempo siano grandezze composte da parti indivisibili. Si obietterà che contro questa lettura del paradosso della Freccia milita soprattutto l'interpretazione di Russell (1980/1917: 77), secondo il quale Zenone aveva ragione quando sosteneva che la freccia in ciascun istante (non in un certo intervallo di tempo!) è ferma in un determinato punto (non in un determinato tratto!) della sua traiettoria. Tuttavia questa interpretazione russelliana della Freccia (e degli altri tre paradossi), per quanto autorevole sia ancor oggi e per quanto feconda poi essa sia stata nel favorire una rivalutazione di Zenone da parte di molti matematici, contrasta però con la lettera del testo aristotelico, dato che – come abbiamo visto – Aristotele rimprovera a Zenone riguardo alla Freccia proprio di aver erroneamente ammesso che i punti e gli istanti possano essere parti indivisibili (ossia atomi) rispettivamente dello spazio e del tempo. Inoltre l'ipotesi che spazio e tempo siano grandezze discrete (e quindi non continue) sembra essere a fondamento anche dello Stadio e consente d'interpretare l'argomento di Zenone in modo molto più plausibile e a lui più favorevole di quanto non suggerisca la sbrigativa critica di Aristotele. In conclusione – sulla scia di un'ipotesi avanzata alla fine dell'Ottocento da filosofi e storici della filosofia come V. Brochard, P. Tannery e

G. Noel e poi fatta propria anche da Ross (1979/1936: 81-2) – si può dire che i quattro paradossi si dividono in due gruppi: la Dicotomia e l'Achille presuppongono la divisibilità all'infinito dello spazio e del tempo (e conseguentemente anche del movimento) in quanto grandezze continue; la Freccia e lo Stadio si basano invece sull'ipotesi opposta che spazio, tempo e movimento siano delle grandezze discrete[8].

In secondo luogo anche l'idea largamente diffusa che tutti e quattro gli argomenti di Zenone contro la possibilità del movimento siano delle dimostrazioni per assurdo è in realtà molto discutibile. Infatti, se si accetta l'ipotesi che nella Dicotomia la divisibilità all'infinito dello spazio da percorrere sia una divisibilità regressiva, allora la Dicotomia stessa è una prova diretta e non per assurdo dell'impossibilità del movimento: la divisibilità all'infinito dello spazio da percorrere, impedendo a chi voglia percorrere una certa distanza di fare persino il primo passo per quanto corto esso sia, implica in modo diretto l'impossibilità di ogni movimento. L'Achille è invece una dimostrazione per assurdo: se il movimento fosse possibile, allora, sempre a causa della divisibilità all'infinito dello spazio, nessun movimento potrebbe essere portato a conclusione. Insomma ogni movimento in corso di realizzazione implicherebbe la sua impossibilità!

Ora, se la Dicotomia e l'Achille, pur essendo basati entrambi sulla divisibilità all'infinito dello spazio, sono l'uno un argomento diretto e l'altro un argomento per assurdo, allora è ragionevole estendere questa suddivisione anche ai due argomenti che partono dal presupposto opposto del carattere discreto dello spazio del tempo, considerando la Freccia un argomento diretto e lo Stadio un argomento per assurdo. Si ottiene in tal modo questo schema quadripartito:

	Divisibilità all'infinito	Struttura discreta
Dimostrazione diretta	*Dicotomia*	*Freccia*
Dimostrazione per assurdo	*Achille*	*Stadio*

[8] Di opinione opposta riguardo alla Freccia, sulla scia di J. Barnes, è Fano (2012: 15-6), ma senza portare degli argomenti a sostegno.

7. *La riscoperta di Zenone da parte dei matematici e dei fisici del XX secolo*

Questo schema quadripartito consente di valutare con maggiore chiarezza l'attendibilità dei riconoscimenti che sono stati fatti a Zenone da parte di matematici e fisici dall'Ottocento ai tempi nostri. Per quanto concerne la tesi che Zenone sarebbe un precursore della meccanica quantistica, l'analogia spesso proposta tra il *Quantum Zeno Effect* e i paradossi zenoniani è a dir poco molto superficiale. In meccanica quantistica con il nome di *Quantum Zeno Effect* ci si riferisce al fatto che il tempo di evoluzione di una particella può essere tanto più rallentato quanto più di frequente viene misurato il suo stato. Pertanto, se fosse possibile misurare questo stato in modo ininterrotto, l'evoluzione della particella potrebbe essere completamente arrestata (Itano *et al.*, 1990). Come si vede, la parentela di questa teoria con la tesi zenoniana dell'impossibilità del movimento *tout court* è piuttosto lontana!

Più solida e storicamente documentata è la tesi di C. Rovelli, secondo il quale Zenone, in quanto maestro di Leucippo e quindi indirettamente anche di Democrito, sarebbe un precursore di quella concezione granulare dello spazio-tempo difesa oggi dalla *Quantum Gravity* (Rovelli, 2014: 125-169). Tuttavia anche questa tesi non trova sufficiente conferma nel testo aristotelico mediante il quale conosciamo i paradossi di Zenone. Quest'ultimo, se la nostra ricostruzione della loro struttura quadripartita è fondata, non era un sostenitore del carattere discreto dello spazio e del tempo. Egli prendeva in considerazione quest'ipotesi, insieme all'ipotesi opposta del carattere continuo di queste grandezze, solo per dimostrare mediante il metodo dialettico che il movimento è impossibile in entrambe le ipotesi e che dunque lo è in modo assoluto.

Molto più complesso è valutare la "riabilitazione" di Zenone operata da B. Russell e tutta la discussione che essa ha innescato soprattutto tra matematici, filosofi e storici della filosofia. Si noti anzitutto che Russell, quando dice che Zenone aveva ragione nel sostenere che «la freccia in ogni momento del suo volo è veramente ferma» (Russell, 2010/1901: 353) non intende affatto condividere con lui la tesi dell'impossibilità del movimento. Infatti dopo quella affermazione sull'immobilità della freccia Russell si affretta ad aggiungere che «il solo punto dove Zenone probabilmente sbagliava era nell'inferire (ammesso che egli davvero lo facesse) che, dato che non c'è nessun cambiamento, allora il mondo deve essere sempre nello stesso stato in ogni momento» (*ibid.*). Ma com'è possibile allora, se la freccia in ogni istante è ferma in un punto diverso della sua traiettoria, che essa possa essere considerata davvero in moto? Un movimento è riducibile ad una serie di soste? Non è esso, al pari del tempo, piuttosto una grandezza continua, ossia un "divenire"? Com'è noto, è proprio questa la critica fatta da H. Bergson (2013/1907: 215-228) al tempo "spazializzato" della fisica.

Ad ogni modo, una volta riconosciuto a Russell il merito di aver innescato un dibattito che non si è ancora placato, se vogliamo concentrare la nostra attenzione sul confronto tra le soluzioni date ai paradossi di Zenone da Aristotele e quelle offerte oggi dall'analisi matematica (ad es. Apostol, 1977/1969: 444-449), si deve notare anzitutto che la matematica moderna ricorre al concetto di "serie convergente" per comprendere come una distanza finita o un intervallo temporale finito possano essere divisibili in un numero infinito di sotto-distanze o sotto-intervalli. Ad esempio nella Dicotomia qualunque movimento che copra una distanza pari a 1 può essere considerato come il risultato di una sommatoria avente un numero infinito di addendi (finiti e progressivamente sempre più corti, ciascuno essendo la metà del precedente):

$$1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + (1/2)^4 + \ldots = 1$$

Fin qui nulla di sostanzialmente nuovo rispetto ad Aristotele, salvo una formulazione più rigorosa che la matematica antica non offriva. Ma una differenza cruciale emerge quando si rifletta sul fatto che secondo la matematica moderna la distinzione tra infinito in potenza ed infinito in atto non è accettabile e che quindi, più che chiederci *ex post*, ad esempio, se la distanza finita percorsa da Achille per raggiungere la tartaruga sia divisibile in un numero infinito di sotto-distanze, dobbiamo domandarci *ex ante*, prima che Achille inizi il suo inseguimento, come farà quest'ultimo a percorrere effettivamente una dopo l'altra in un tempo finito le sotto-distanze che in numero infinito lo separano dalla tartaruga. Ed ecco emergere una difficoltà: percorrere una distanza infinita in atto in un tempo finito non è forse un "super-compito" non realizzabile (Fano, 2012: 52-56)? D'altra parte – anche ammesso che questa prima difficoltà possa essere in qualche modo risolta – se ne presenta un'altra, interna all'analisi matematica stessa, che investe qualunque soluzione della Dicotomia e dell'Achille mediante il concetto di serie convergente, se si utilizzano delle serie di numeri razionali. Infatti una serie convergente di numeri razionali non è continua, perché ogni intervallo intermedio tra due numeri razionali può essere sempre ulteriormente suddiviso senza ridursi mai ad essere un punto non ulteriormente divisibile. E quindi si ripropone la difficoltà di fare il primo passo, come nella Dicotomia, o di giungere alla meta (come nell'Achille).

Entrambe queste difficoltà possono però essere superate se, come ha chiarito definitivamente A. Grünbaum (1968), i punti di un qualsiasi segmento (o gli istanti di un qualsiasi intervallo temporale) vengono messi in corrispondenza biunivoca non con una successione di numeri razionali, bensì con una successione di numeri reali. Infatti, mettendo i punti di un segmento (o gli istanti di un intervallo temporale) in corrispondenza biunivoca con delle successioni di numeri reali (che includono oltre ai numeri razionali anche gli irrazionali), un qualsiasi segmento finito può essere composto in atto da punti che siano tanto indivisibili quanto inestesi (e un intervallo temporale può essere composto, sempre in atto, da momenti che siano tanto indivisibili quanto istantanei), purché questi punti e questi istanti siano in numero infinito nel senso di una infinità più che numerabile e quindi facciano dello spazio e del tempo delle grandezze continue. Ciò è dovuto al fatto che i numeri irrazionali – essendo ciascuno di essi il limite comune verso il quale convergono due serie di numeri razionali, l'una per difetto e l'altra per eccesso – sono in grado, per così dire, di "riempire" completamente l'intervallo che distanzia sempre due numeri razionali, per quanto vicini essi siano.

In conclusione ci sembra indubbio che le soluzioni dei paradossi offerte dalla matematica moderna sono più rigorose di quelle reperibili in Aristotele. Tuttavia occorre notare che Aristotele, pur non disponendo del concetto di serie convergente, lo sostituisce con qualcosa di simile, sia pur in modo inconsapevole e senza la necessaria chiarezza, quando sostiene che i punti e gli istanti sono limiti rispettivamente di segmenti o di intervalli temporali e non loro parti e che non è contradditorio considerare in potenza divisibili all'infinito distanze o intervalli temporali che in atto siano finiti.

Riferimenti bibliografici

Apostol, T.M.
1977, *Calcolo: volume primo - Analisi 1*, Torino, Bollati Boringhieri (ed. orig., *Calculus*, vol. 1, New York, John Wiley & Sons, 2a ed. 1969).

Aristotele
1995, *Fisica* (saggio introduttivo, traduzione, note e apparati, testo greco a fronte di L. Ruggiu), Milano, Rusconi.

Bergson, H.
2013, *L'évolution créatrice*, Édition électronique, Les Échos du Maquis (ed. orig. Paris, Alcan, 1907.)

Fano, V.
2012, *I paradossi di Zenone*, Roma, Carocci.

Grünbaum, A.
1968, *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, London, Allen and Unwin.

Itano, W.M. - Heinzen, D.J. - Bollinger, J.J. - Wineland, D.J. (a cura di)
1990, «Quantum Zeno Effect», in *Physical Review* A, 41, pp. 2295-2300.

Ross, D.
1979, *Aristotle's Physics*, a revised text with introduction and commentary, Oxford, Clarendon Press (prima ed. 1936).

Rovelli, C.
2014, *La realtà non è come ci appare*, Milano, Cortina.

Russell, B.
1980, «La matematica e i metafisici», in Id., *Misticismo e logica*, Milano, Longanesi, pp. 71-92 (ed. orig. «Mathematics and the Metaphysicians» [1914], poi in *Mysticism and Logic and other essays*, London, Allen & Unwin, 1917, pp. 74-96).

Russell, B.
2010, *Principles of Mathematics*, London-New York, Routldege (prima ed. 1901).

Viano, C.A.
1993, «L'essere e la natura - 4. Zenone e i paradossi», in P. Rossi - C.A. Viano, *Storia della filosofia: 1. L'antichità*, Roma-Bari, Laterza, pp. 56-63 («Zenone di Elea: la vita», pp. 672-673).